UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte I)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios en la variable x sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Para cada $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ dado por $p(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$, considerar las funciones $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_c : \mathbb{R}[x] \to [0, \infty[$ dado por

$$\|p(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |p(x)|; \quad \|p(x)\|_c = \sum_{n=0}^{k} |c_n||a_n|,$$

donde $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$.

   (a) Demostrar que si $c_n \neq 0$ para todo n, entonces $\|\cdot\|_c$ define una norma sobre $\mathbb{R}[x]$. ¿Qué pasa si algún $c_n = 0$?

   (b) Sean $c = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $d = \{n\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Las normas $\|\cdot\|_c$ y $\|\cdot\|_d$ son equivalentes ?

   (c) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[x]$, donde $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{x}{2})^k$. Demostrar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_\infty$.

   (d) Sea $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $c_n = 1$, para cada n, y $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Demostrar que $f(x)$ es absolutamente convergente en $\mathbb{R}[x]$, en la norma $\|\cdot\|_c$.

2. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean $S, T \in L(V)$ dos operadores lineales que conmutan, es decir, $ST = TS$. Demuestre que:

   (a) Si λ es un valor propio de S, entonces el espacio propio

$$V_\lambda = \{x \in V : \ S(x) = \lambda x\}$$

   es invariante bajo T.

   (b) S y T tienen al menos un vector propio en común (posiblemente con valores propios diferentes).

   (c) Existe una base B de V tal que las representaciones matriciales de S y T respecto de B son ambas triangulares superiores.

3. Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, para cada punto $(x, y) \in X$ se define

$$V(x, y) = \{U \subset X : \ (tx, ty) \in U, \ 0 < t \leq 1\}.$$

   (a) Demostrar que $V(x, y)$ es un sistema de vecindades de (x, y) para una topología T en X.

   (b) Estudiar si (X, T) cumple los axiomas de primero y segundo numerable.

   (c) ¿Es (X, T) un espacio separable ?

(d) Calcular en (X, T) el interior, la adherencia y la frontera del conjunto

$$M = \{(x, y) \in X : \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

4. Sea G un grupo finito y $f \in \mathrm{Aut}(G)$, tal que el único elemento que coincide son su imagen por f es el elemento neutro e de G, es decir, $f(e) = e$.

   (a) Demostrar que $\phi : G \to G$, dado por $\phi(x) = f(x)x^{-1}$ es biyectiva.

   (b) Si $x \in G$ con $x \neq e$. ¿ x y $f(x)$ son conjugados ?

   (c) Demostrar que si f^2 es el automorfismo identidad, entonces $f(x) = x^{-1}$, y G es un grupo abeliano de orden impar.

5. Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. El soporte de f es

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}},$$

y decimos que f se anula al infinito si para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : \ |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto. Además, recuerde que X se llama localmente compacto si todo punto tiene una vecindad abierta cuya clausura es compacta. Demuestre que si X es localmente compacto, entonces

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \ \mathrm{Supp}(f) \text{ es compacto}\},$$

es la clausura de

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \ f \text{ se anula al infinito}\},$$

en la metrica uniforme.